

第3讲 一次函数与轴对称综合

一、一次函数与等腰三角形综合

🔗 两圆一线

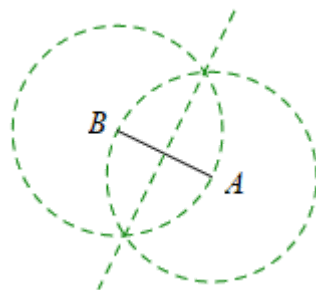
前提：“两定一动”型等腰三角形可借助“两圆一线”定性分析：

如图，使 $\triangle ABC$ 构成等腰三角形的点 C 必在“两圆一线”上，

①所谓两圆，即分别以点 A 、 B 为圆心，线段 AB 的长为半径作圆，对应以 AB 为腰的两种情形；

②所谓一线，即线段 AB 的中垂线，对应以 AB 为底的一种情形；

此“两圆一线”上除不能构成三角形的点外，皆为所求点 C 。



🔗 代数法

前提：该三角形三边的平方为常数或者关于某个参数的二次式；

步骤：

①写出或设出三角形三个顶点的坐标；

②利用 两点间距离公式（或 勾股定理），计算三角形三条边长的平方；

③由等腰三角形的三边长（的平方）可以两两相等，需分 三类，列方程求解；

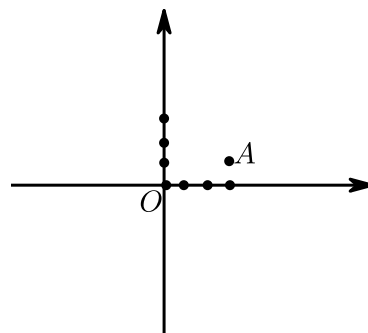
④ 检验 求出的点是否符合题意，即是否能构成三角形。

【教法备注】

代数解法的优势是实现“盲解盲算”，可与“两圆一线”结合使用，以数解形，以形助数。特别是，当目标线段“横平竖直”时，可直接将线段长度转化为坐标，而不用列方程求解。

|| 例题1

1. 在平面直角坐标系中，点 $A(3, 1)$ 、 $O(0, 0)$ 。



- (1) 在 x 轴上找一点 P , 使得 $\triangle OAP$ 是以 OA 为腰的等腰三角形 , 则满足条件的点 P 有几个 .
- (2) 在坐标轴上找一点 P , 使得 $\triangle OAP$ 是以 OA 为腰的等腰三角形 , 则满足条件的点 P 有几个 .
- (3) 在坐标轴上找一点 P , 使得 $\triangle OAP$ 是等腰三角形 , 则满足条件的点 P 有几个 .
- (4) 在 $x = 2$ 上找一点 P , 使得 $\triangle OAP$ 是等腰三角形 , 则满足条件的点 P 有几个 .

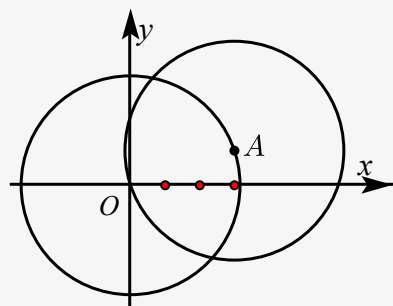
【答案】 (1) 3 个 .

(2) 6 个

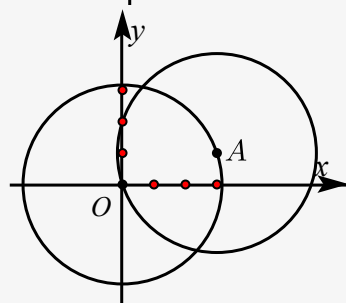
(3) 8 个 .

(4) 5 个 .

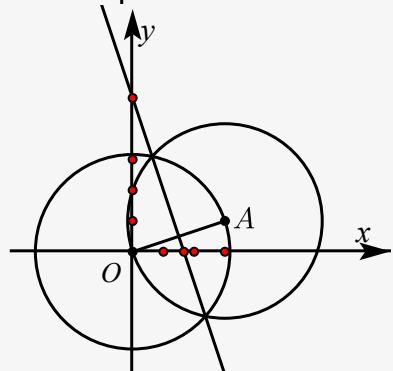
【解析】 (1)



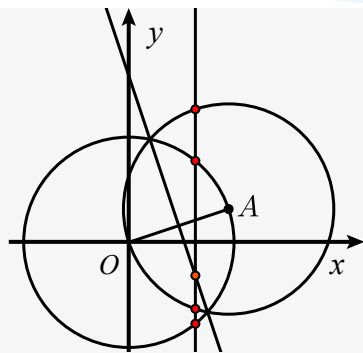
(2)



(3)



(4)



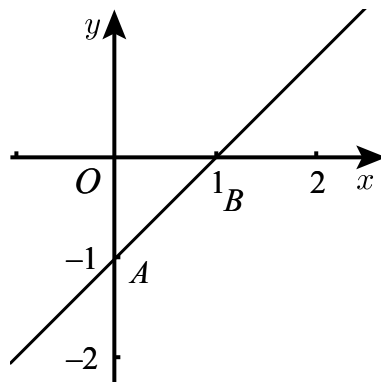
【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

【重点强调】

直接寻找个数的问题，可直接利用“两圆一线”的方法寻找

练习1

2. 直线 $y = x - 1$ 与两坐标轴分别交于 A 、 B 两点，点 C 在坐标轴上，若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则满足条件的点 C 最多有 _____ 个。

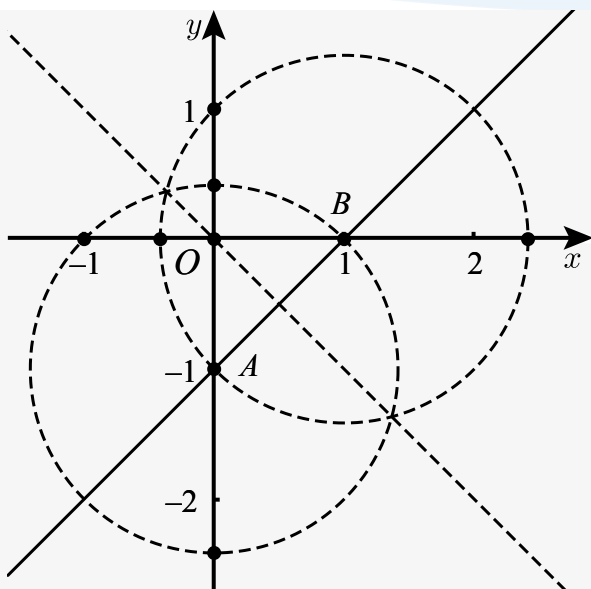


【答案】7

【解析】方法一：直线 $y = x - 1$ 与 y 轴的交点为 $A(0, -1)$ ，与 x 轴的交点为 $B(1, 0)$ 。

- ①以 AB 为底， C 在原点；
- ②以 AB 为腰，且 A 为顶点， C 点有 3 种可能位置；
- ③以 AB 为腰，且 B 为顶点， C 点有 3 种可能位置。

所以满足条件的点 C 最多有 7 个。



方法二：由题意知 $A(1, 0)$, $B(0, -1)$,

则 $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$AB = BC$ 时 , $C_1(-1, 0)$, $C_2(0, -\sqrt{2}-1)$, $C_3(0, \sqrt{2}-1)$,

$AB = AC$ 时 , $C_4(1-\sqrt{2}, 0)$, $C_5(0, 1)$, $C_6(\sqrt{2}+1, 0)$,

$AC = BC$ 时 , $C_7(0, 0)$.

【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

例题2

3. 如图1, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -2x + 8$ 的图象与 x 轴, y 轴分别交于点 A , 点 C , 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴, 垂足为点 A , 过点 C 作 $CB \perp y$ 轴, 垂足为点 C , 两条垂线相交于点 B .

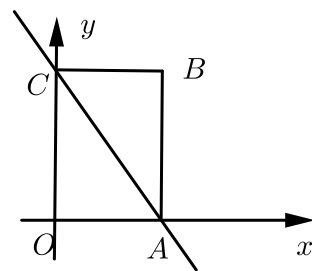


图1

- (1) 线段 AB , BC , AC 的长分别为:

$AB = \underline{\hspace{2cm}}$, $BC = \underline{\hspace{2cm}}$, $AC = \underline{\hspace{2cm}}$;

- (2) 折叠 $\triangle ADC$, 使点 A 与点 C 重合, 再将折叠后的图形展开, 折痕 DE 交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E , 连接 CD , 如图2.

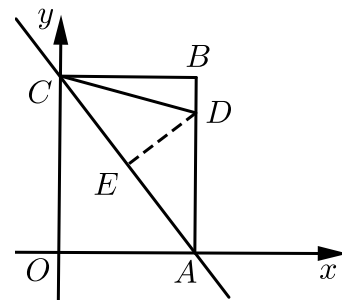


图2

- ① 点 D 的坐标；
- ② 在 y 轴上，是否存在点 P ，使得 $\triangle APD$ 为等腰三角形．若存在，请直接写出符合条件的所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】 (1) $8; 4; 4\sqrt{5}$

(2) ① $D(4, 5)$.

② 满足条件的点 P 坐标为 $(0, 3)$ 或 $(0, -3)$ 或 $(0, \frac{5}{2})$ 或 $(0, 2)$ 或 $(0, 8)$.

【解析】 (1) $\because$ 一次函数 $y = -2x + 8$ 的图象与 x 轴， y 轴分别交于点 A ，点 C ，

$$\therefore A(4, 0), C(0, 8),$$

$$\therefore OA = 4, OC = 8,$$

$$\because AB \perp x\text{轴}, CB \perp y\text{轴}, \angle AOC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$$\therefore AB = OC = 8, BC = OA = 4,$$

$$\text{在Rt}\triangle ABC\text{中，根据勾股定理得，} AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4\sqrt{5}.$$

故答案为： $8, 4, 4\sqrt{5}$.

(2) ① ①由(1)知， $BC = 4, AB = 8$ ，由折叠知， $AD = CD$ ，

$$\text{在Rt}\triangle BCD\text{中，} BD = AB - AD = 8 - AD,$$

$$\text{根据勾股定理得，} CD^2 = BC^2 + BD^2,$$

$$\text{即：} AD^2 = 16 + (8 - AD)^2,$$

$$\therefore AD = 5,$$

$$\therefore D(4, 5).$$

② 由①知， $D(4, 5)$ ，

$$\text{设} P(0, y),$$

$$\because A(4, 0),$$

$$\therefore AP^2 = 16 + y^2, DP^2 = 16 + (y - 5)^2,$$

$\therefore \triangle APD$ 为等腰三角形，

$$\therefore \text{I. } AP = AD,$$

$$\therefore 16 + y^2 = 25,$$

$$\therefore y = \pm 3,$$

$$\therefore P(0, 3) \text{ 或 } (0, -3)$$

$$\text{II. } AP = DP,$$

$$\therefore 16 + y^2 = 16 + (y - 5)^2,$$

$$\therefore y = \frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(0, \frac{5}{2}\right),$$

$$\text{III. } AD = DP, 25 = 16 + (y - 5)^2,$$

$$\therefore y = 2 \text{ 或 } 8,$$

$$\therefore P(0, 2) \text{ 或 } (0, 8).$$

综上所述, 满足条件的点 P 坐标为 $(0, 3)$ 或 $(0, -3)$ 或 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 或 $(0, 2)$ 或 $(0, 8)$.

【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

练习2

4. 直线 $y = \frac{4}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 和点 B , 在 x 轴上取点 C , 使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 则点 C 的坐标是 _____.

【答案】 $\left(\frac{7}{6}, 0\right)$ 或 $(2, 0)$ 或 $(-8, 0)$ 或 $(3, 0)$

【解析】 $\because$ 直线方程为 $y = \frac{4}{3}x + 4$,

$\therefore$ 易求 $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$.

设 C 点坐标为 $(x, 0)$.

① 当以 AB 为底时, 可得 $AC = BC$, 即 $3 + x = \sqrt{x^2 + 16}$,

解得 $x = \frac{7}{6}$, 则 $C\left(\frac{7}{6}, 0\right)$.

② 当以 BC 为底时, 可得 $AC = AB = 5$,

若点 C 在点 A 右侧, 即 $3 + x = 5$, 解得 $x = 2$, 则 $C(2, 0)$;

若点 C 在点 A 左侧, 即 $-3 - x = 5$, 解得 $x = -8$, 则 $C(-8, 0)$;

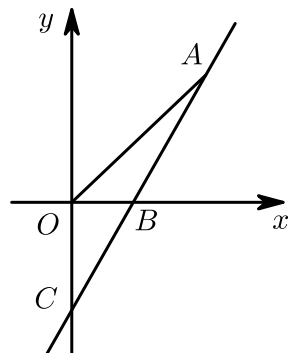
③ 当以 AC 为底时, 可得 $AB = BC = 5$, 即得 $OA = OC = 3$,

则 $C(3, 0)$.

综上所述, 满足条件的点 C 的坐标是 $\left(\frac{7}{6}, 0\right)$ 或 $(2, 0)$ 或 $(-8, 0)$ 或 $(3, 0)$.

【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

5. 如图所示，直线 $y = kx - 2$ 与 x 轴， y 轴分别交于点 B ， C ，且 $OC = 2OB$ ， A 为直线 BC 上一动点。



- (1) 求点 B 的坐标和 k 的值。
- (2) 当 $\triangle AOB$ 的面积是4时，求点 A 在第一象限的坐标。
- (3) 在(2)的条件下，在 x 轴上是否存在一点 P ，使 $\triangle POA$ 是等腰三角形？若存在，请直接写出满足条件的所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $B(1, 0)$ ， $y = 2x - 2$ 。

(2) $A(5, 8)$ 。

(3) 存在， $P_1(\sqrt{89}, 0)$ ， $P_2(-\sqrt{89}, 0)$ ， $P_3(8.9, 0)$ ， $P_4(10, 0)$ 。

【解析】(1) $\because$ 直线 $y = kx - 2$ 与 y 轴交于点 C ，

$$\therefore C(0, -2),$$

$$\therefore OC = 2,$$

$$\because OC = 2OB,$$

$$\therefore OB = 1,$$

由图可知， B 在 x 轴正半轴，

$$\therefore B(1, 0),$$

将 $B(1, 0)$ 代入 $y = kx - 2$ 得：

$$0 = k - 2,$$

$$\therefore k = 2,$$

$$\text{则 } y = 2x - 2.$$

(2) 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D ，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AD = 4, \quad OB = 1,$$

$$\therefore AD = 8,$$

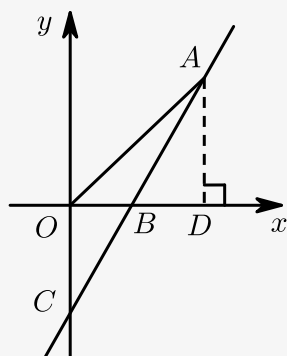
$$\therefore \text{设 } A(m, 8),$$

$\because A$ 点在 $y = 2x - 2$ 上,

$$\therefore 2m - 2 = 8,$$

$$m = 5,$$

$$\therefore A(5, 8).$$



(3) 设 $P(x, 0)$,

$$\because O(0, 0), A(5, 8),$$

$$\therefore OP = |x|, AP = \sqrt{(x-5)^2 + 8^2}, OA = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}.$$

①当 $OP = OA$ 时,

$$|x| = \sqrt{89}, \text{ 解得: } x = \pm\sqrt{89},$$

$$\therefore P_1(\sqrt{89}, 0), P_2(-\sqrt{89}, 0).$$

②当 $OP = AP$ 时,

$$|x| = \sqrt{(x-5)^2 + 8^2},$$

$$\therefore x^2 = (x-5)^2 + 64, \text{ 解得: } x = 8.9,$$

$$\therefore P_3(8.9, 0).$$

③当 $AP = OA$ 时,

$$\sqrt{(x-5)^2 + 8^2} = \sqrt{89},$$

$$(x-5)^2 + 8^2 = 89,$$

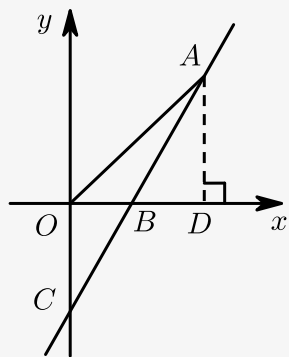
$$(x-5)^2 = 25,$$

$$x-5 = \pm 5,$$

$$\therefore x_1 = 10, x_2 = 0 \text{ (舍)},$$

$$\therefore P_4(10, 0).$$

综上: $P_1(\sqrt{89}, 0), P_2(-\sqrt{89}, 0), P_3(8.9, 0), P_4(10, 0).$

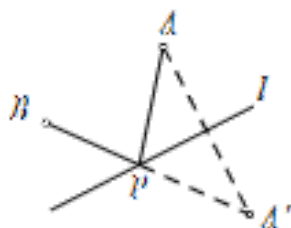


【标注】【知识点】一次函数与等腰三角形结合

二、一次函数与最短路径综合

🔗 线段和 $|PA + PB|$ 最小值

同侧

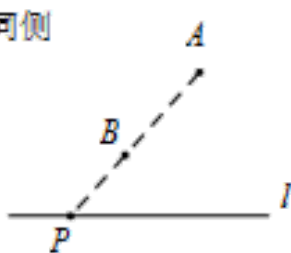


异侧

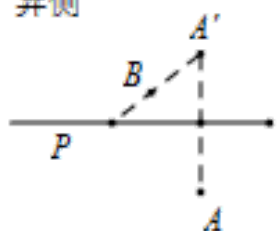


🔗 线段差 $|PA - PB|$ 最大值

同侧

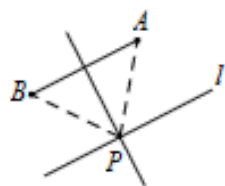


异侧



🔗 线段差 $|PA - PB|$ 最小值

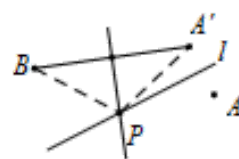
同侧



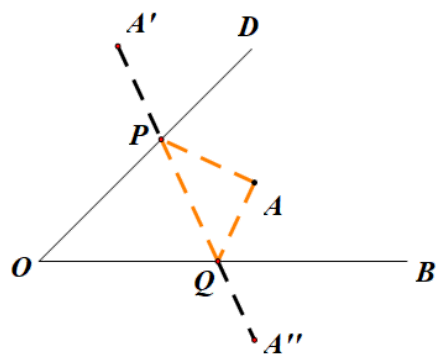
异侧



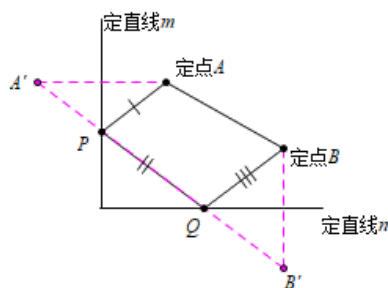
异侧



🔗 三角形周长最小值

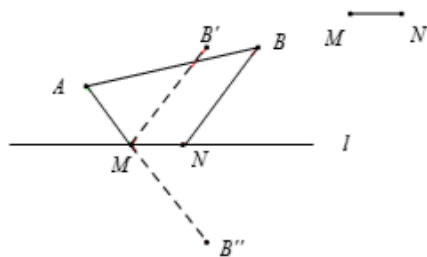
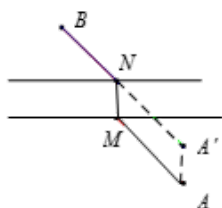


💡 四边形周长最小值

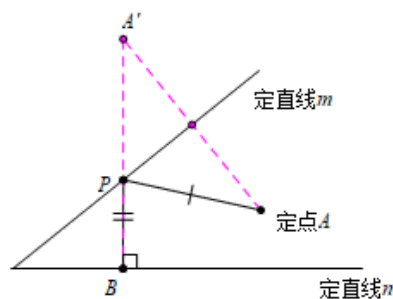


💡 过河问题

过河最短距离、定长问题



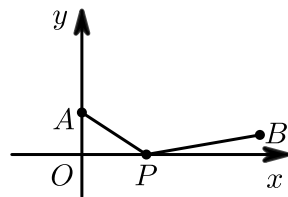
💡 “一定两动”型



|| 例题3

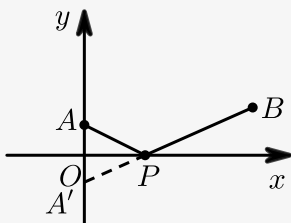
【教法备注】

6. 如图，在平面直角坐标系中， $A(0, 1)$ ， $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ ， P 为 x 轴上一动点，则 $PA + PB$ 最小时点 P 的坐标为_____。



【答案】 $(2, 0)$

【解析】 作 A 关于 x 轴的对称点 A' ，



连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P ，此时 $PA + PB$ 最小，

$\because A(0, 1)$ ，

$\therefore A'(0, -1)$ ，

设 $A'B: y = kx + b$ ，

把 $A'(0, -1)$ ， $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ 代入 $\begin{cases} -1 = b \\ \frac{1}{2} = 3k + b \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$ 。

$\therefore A'B: y = \frac{1}{2}x - 1$ 。

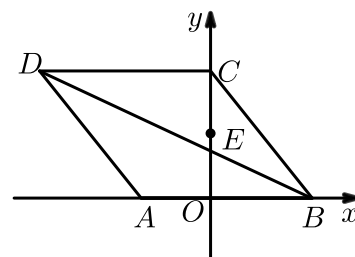
当 $y = 0$ 时， $x = 2$ ，

$\therefore P(2, 0)$ 。

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

练习3

7. 如图，菱形四边形 $ABCD$ 中， $B(3, 0)$ ， $C(0, 4)$ ， $D(-5, 4)$ 。



(1) 点A的坐标为 _____ .

(2) 点E(0, 2), 若P为BD上一动点, 当CP + PE取最小值时, 点P的坐标为 _____ .

【答案】 (1) (-2, 0)

(2) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

【解析】 (1)

(2) 设直线BD的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -5k + b = 4 \\ 3k + b = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线BD的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点A, C关于BD对称,

$\therefore$ 连接AE交BD于点P, 此时, PC + PE最小, 最小值为AE,

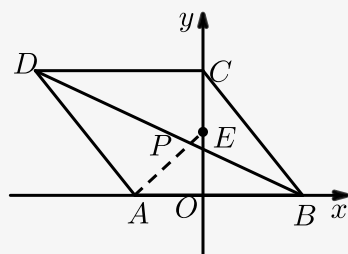
$\therefore A(-2, 0), E(0, 2)$,

$\therefore$ 直线AE的解析式为 $y = x + 2$ ①,

$\therefore$ 直线BD的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ②,

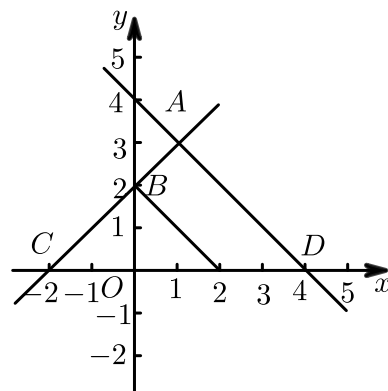
联立①②解得, $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{5}{3}$,

$\therefore P\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.



【标注】 【知识点】一次函数与轴对称最值问题

8. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = x + 2$ 的图象与一次函数 $y = kx + b$ 的图象相交于点 $A(1, 3)$, 一次函数 $y = x + 2$ 的图象交 x 轴负半轴于点C, 交 y 轴正半轴于点B.



- (1) 根据图象直接回答，不等式 $x + 2 < kx + b$ 的解集．
- (2) 如果 $D(4, 0)$ ，请写出 $\triangle ACD$ 的面积．
- (3) 在 x 轴是否存在一点 M ，使 $AM + BM$ 的值最小？若存在，请求出此时点 M 的坐标．

【答案】 (1) $x < 1$ ．

(2) 9．

(3) $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$ ．

【解析】 (1) 由题可得，不等式 $x + 2 < kx + b$ 的解集为 $x < 1$ ．

故答案为： $x < 1$ ．

(2) $\because$ 一次函数 $y = x + 2$ 的图象交 x 轴负半轴于点 C ，

$\therefore C(-2, 0)$ ，

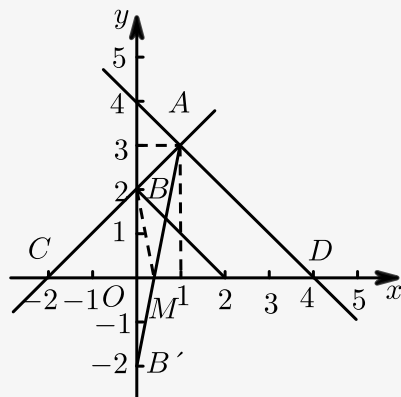
又 $\because D(4, 0)$ ， $A(1, 3)$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ ．

故答案为：9．

(3) 在 x 轴存在动点 M ，使 $AM + BM$ 的值最小．

如图，作点 B 关于 x 轴的对称点 B' ，则 $B'(0, -2)$ ，



设直线 AB' 的解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\text{则} \begin{cases} 3 = m + n \\ -2 = n \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 5 \\ n = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB' 的解析式为 $y = 5x - 2$,

$\therefore$ 当 $y = 0$ 时, $x = \frac{2}{5}$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$.

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

|| 例题4

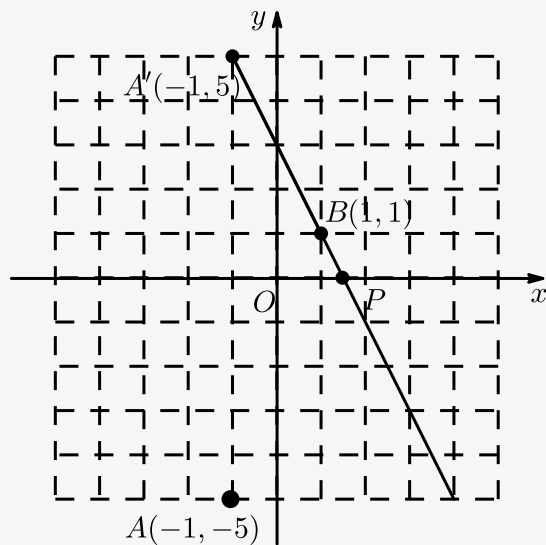
【教法备注】

线段差最大值问题

9. 在直角坐标系中, 有点 $A(-1, -5)$, $B(1, 1)$, 点 P 在 x 轴上且使得 $|PA - PB|$ 最大, 求 P 点坐标.

【答案】 $P(1.5, 0)$.

【解析】 如图, 将 A 点关于 x 轴对称得到点 $A'(-1, 5)$, 作直线 $A'B$ 与 x 轴的交点即为点 P , 由直线 $A'B$ 的解析式 $y = -2x + 3$ 可求得点 $P(1.5, 0)$.



【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

|| 练习4

10. 正方形 $OABC$ 的边长为 2, 其中 OA 、 OC 分别在 x 轴和 y 轴上, 如图 1 所示, 直线 l 经过 A 、 C 两点.

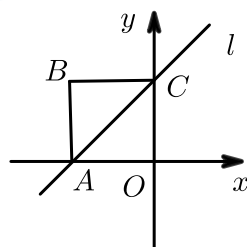


图1

- (1) 若点 P 是直线 l 上的一点, 当 $\triangle OPA$ 的面积是 3 时, 请求出点 P 的坐标.
- (2) 如图 2, 坐标系 xOy 内有一点 $D(-1, 2)$, 点 E 是直线 l 上的一个动点, 请求出 $BE + DE$ 的最小值和此时点 E 的坐标.

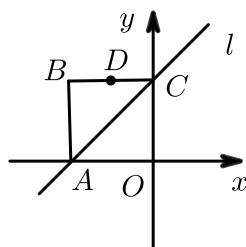


图2

- (3) 若点 F 和点 D 关于 x 轴对称, 求出 $|BE - FE|$ 的最大值, 并求出此时点 E 的坐标.

【答案】 (1) $P_1(1, 3)$, $P_2(-5, -3)$.

(2) 点 E 的坐标为 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $|BE + DE|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$.

(3) $|BE - FE|$ 的最大值为 $\sqrt{5}$, 此时点 E 坐标为 $(2, 4)$.

【解析】 (1) $\because$ 正方形 $OABC$ 的边长为 2,

$\therefore A(-2, 0)$, $C(0, 2)$,

设直线 l 的解析式为: $y = kx + 2$,

将 $A(-2, 0)$ 代入得 $-2k + 2 = 0$, 解得 $k = 1$,

$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y = x + 2$,

设 P 的坐标为 $(m, m + 2)$,

依题意得 $\frac{1}{2} \times 2 \times |m + 2| = 3$, 解得 $m = 1$ 或 $m = -5$,

$\therefore P_1(1, 3)$, $P_2(-5, -3)$.

(2) $\because O$ 与 B 关于直线 l 对称,

$\therefore BE = OE$, $BE + DE = OE + DE$,

$\therefore$ 当 O 、 D 、 E 三点在一条直线上时, $OE + DE$ 最小,

$\therefore$ 连接 OD 交直线 l 于点 E , 则点 E 为所求,

此时 $BE + DE = OE + DE = OD$, OD 即为最小值

设 OD 所在直线为 $y = k_1x$ ($k_1 \neq 0$),

将 $D(-1, 2)$ 代入得 $-k_1 = 2$, 解得 $k_1 = -2$,

$\therefore$ 直线 OD 为 $y = -2x$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$\therefore$ 点 D 坐标为 $(-1, 2)$,

$\therefore$ 由勾股定理得 $OD = \sqrt{5}$,

即 $BE + DE$ 的最小值为 $\sqrt{5}$.

(3) $\therefore O$ 与 B 关于直线 l 对称,

$\therefore BE = OE, F(-1, -2)$,

$\therefore |BE - FE| = |OE - FE|$,

当 O, E, F 三点共线时, $|OE - FE|$ 的最大值, 最大值为 OF ,

$\therefore F(-1, -2)$,

$\therefore$ 直线 OE 的解析式为 $y = 2x, OF = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$\text{由} \begin{cases} y = 2x \\ y = x + 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases},$$

$\therefore E(2, 4)$,

$\therefore |BE - FE|$ 的最大值为 $\sqrt{5}$, 此时点 E 坐标为 $(2, 4)$.

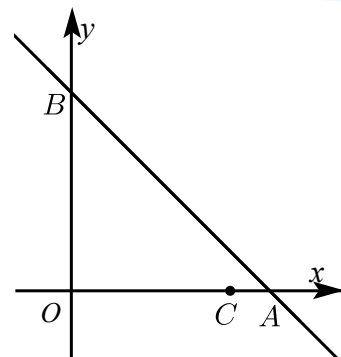
【标注】【知识点】一次函数与动点问题

|| 例题5

【教法备注】

三角形周长最小值问题

11. 如图, 直线 $y = -x + 5$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A, B 两点.



- (1) 求 A 、 B 两点的坐标 .
- (2) 已知点 C 坐标为 $(4, 0)$, 设点 C 关于直线 AB 的对称点为 D , 请直接写出点 D 的坐标 .
- (3) 请在直线 AB 和 y 轴上分别找一点 M 、 N 使 $\triangle CMN$ 的周长最短 , 在平面直角坐标系中作出图形 , 并求出点 N 的坐标 .

【答案】 (1) $A(5, 0)$ 、 $B(0, 5)$.

(2) $D(5, 1)$.

(3) $N\left(0, \frac{4}{9}\right)$.

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = -x + 5$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点

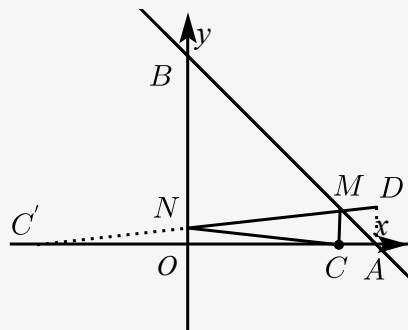
令 $x = 0$, 则 $y = 5$. 令 $y = 0$, 则 $x = 5$

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(5, 0)$ 、点 B 坐标为 $(0, 5)$.

(2) 点 C 关于直线 AB 的对称点 D 的坐标为 $(5, 1)$.

(3) 作点 C 关于 y 轴的对称点 C' , 则 C' 的坐标为 $(-4, 0)$,

连结 $C'D$ 交 AB 于点 M , 交 y 轴于点 N .



$\because$ 点 C 、 C' 关于 y 轴对称 ,

$\therefore NC = NC'$,

又 $\because$ 点 C 、 D 关于直线 AB 对称 ,

$\therefore CM = DM$,

此时 , $\triangle CMN$ 的周长 $= CM + MN + NC = DM + MN + NC' = DC'$ 周长最短 .

设直线 $C'D$ 的解析式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 点 C' 的坐标为 $(-4, 0)$, 点 D 的坐标为 $(5, 1)$,

$$\therefore \begin{cases} 1 = 5k + b \\ 0 = -4k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{9} \\ b = \frac{4}{9} \end{cases},$$

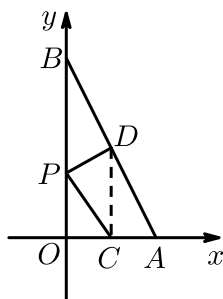
$\therefore$ 直线 $C'D$ 的解析式为 $y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$,

与 y 轴的交点 N 的坐标为 $(0, \frac{4}{9})$.

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

练习5

12. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 、 y 轴分别交于点 $A(2, 0)$, $B(0, 4)$, O 为坐标原点 .



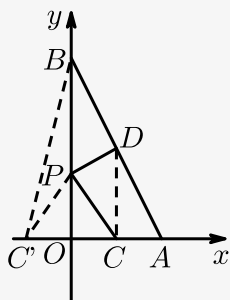
- (1) 设 OA 、 AB 的中点分别为 C 、 D , P 为 OB 上一动点 , 求 $PC + PD$ 的最小值 , 并求此时 P 点的坐标 .
- (2) 设 OB 的中点为 P , C 、 D 分别为 OA 、 AB 上的动点 , 求 $\triangle PCD$ 周长的最小值 , 并求此时 C 、 D 两点的坐标 .

【答案】 (1) $2\sqrt{2}$; $(0, 1)$.

(2) $\frac{8}{5}\sqrt{10}$; $C(\frac{2}{3}, 0)$, $D(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$.

【解析】 (1) 易求得该一次函数的解析式为 $y = -2x + 4$.

设点 C 关于 y 轴的对称点为 C' , 连结 PC' 、 $C'D$,



则 $PC = PC'$,

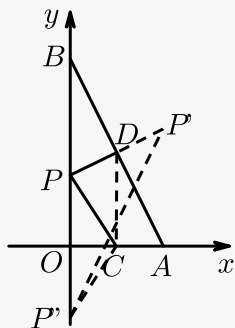
$\therefore PC + PD = PC' + PD \geq C'D$, 取等时 C' 、 P 、 D 共线 .

此时 C' 点的坐标为 $(-1, 0)$, D 点的坐标为 $(1, 2)$,

$\therefore (PC + PD)_{\min} = C'D = \sqrt{(1+1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 直线 $C'D$ 的解析式为 $y = x + 1$,
 $\therefore P$ 点的坐标为 $(0, 1)$.

(2) 易求得该一次函数的解析式为 $y = -2x + 4$.

设点 P 关于直线 AB 的对称点为 P' , 关于 x 轴的对称点为 P'' , 连结 $P'D$ 、 CD 、 $P'C$ 、 $P'P''$,



则 $PD = P'D$, $PC = P'C$,

$\therefore C_{\triangle PCD} = PC + CD + PD = P'C + CD + P'D \geq P'P''$, 取等时 P' 、 C 、 D 、 P'' 共线,

此时 P' 点的坐标为 $(\frac{8}{5}, \frac{14}{5})$, P'' 点的坐标为 $(0, -2)$,

$\therefore (C_{\triangle PCD})_{\min} = P'P'' = \sqrt{(\frac{8}{5})^2 + (\frac{14}{5} + 2)^2} = \frac{8}{5}\sqrt{10}$, 直线 $P'P''$ 的解析式为 $y = 3x - 2$,

$\therefore C$ 点的坐标为 $(\frac{2}{3}, 0)$, D 点的坐标为 $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$.

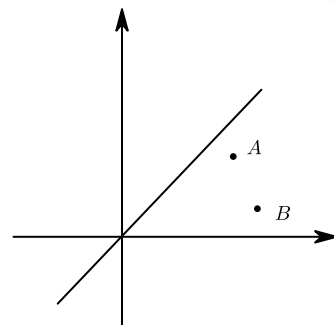
【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

|| 例题6

【教法备注】

四边形周长最小值问题

13. 如图, 在平面直角坐标系中, 有点 $A(5, 2)$, $B(6, 1)$, $M(m, m)$, $N(n, 0)$, $AN + NM + MB$ 的值最小时, 求直线 MN 的解析式及 m , n 的值, 并求出最小值.



【答案】 $y = -2x + 8$, $m = \frac{8}{3}$, $n = 4$, 最小值为 $4\sqrt{5}$.

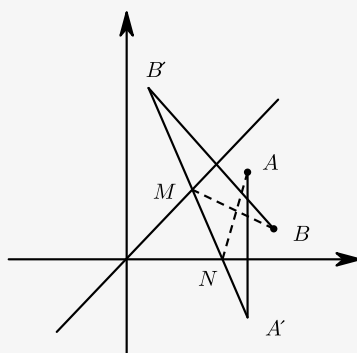
【解析】 如图, 将点 A 、 B 分别关于 x 轴, $y = x$ 对称到 $A'(5, -2)$ 、 $B'(1, 6)$, 直线 $A'B'$ 与 x 轴, $y = x$ 的交点即为 N 、 M 点,

求得直线 $A'B'$ 的解析式为

$$y = -2x + 8,$$

所以 $m = \frac{8}{3}$, $n = 4$ 最小值为

$$\sqrt{(6+2)^2 + (1-5)^2} = 4\sqrt{5}.$$

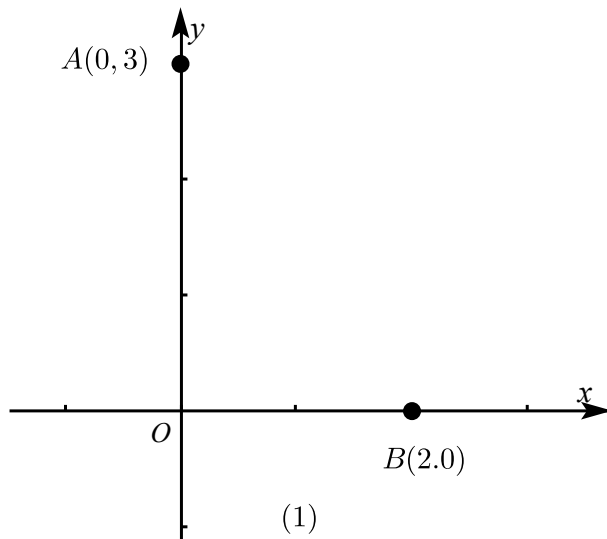


【标注】 【知识点】 线段和的最小值

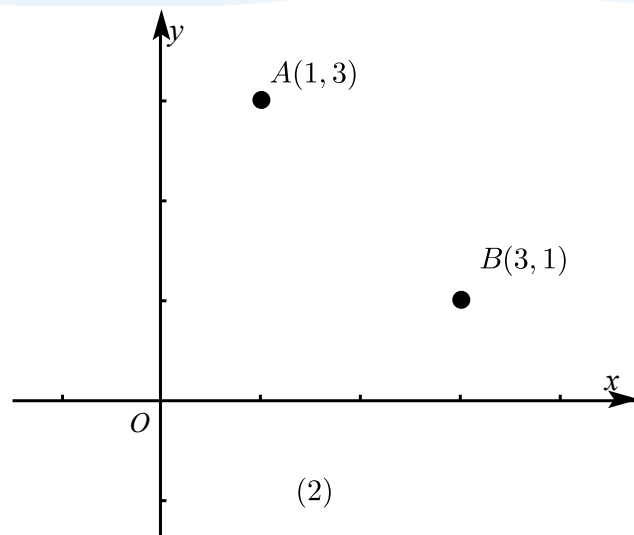
练习6

14. 按要求解答问题:

(1) 如图(1), 点 C 的坐标为 $(3, y)$, 使 $\triangle ABC$ 的周长最小, 求 y 的值和 $\triangle ABC$ 的周长最小值.



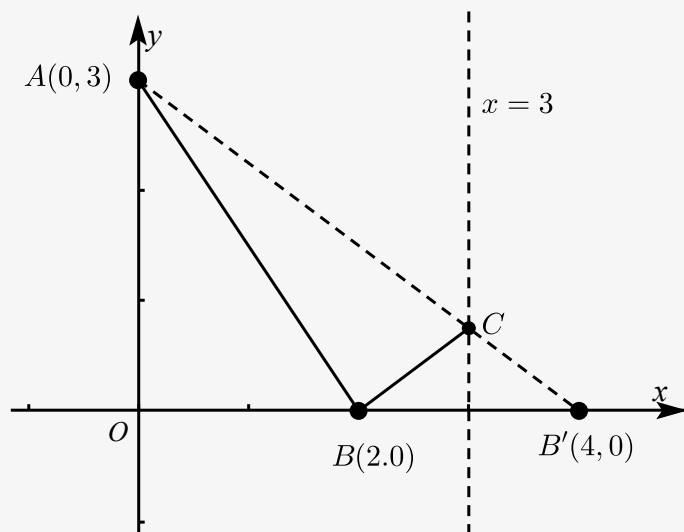
(2) 如图(2), 在 x 轴上有一点 C , 在 y 轴上有一点 D , 使 $AD + CD + BC$ 值最小, 求直线 CD 的解析式及点 C , D 坐标和 $AD + CD + BC$ 的最小值.



【答案】(1) $y = \frac{3}{4}$; $5 + \sqrt{13}$.

(2) $y = -x + 2$, $C(2, 0)$, $D(0, 2)$, $AD + CD + BC$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

【解析】(1) 如图,



作 B 关于直线 $x = 3$ 的对称点 $B'(4, 0)$,

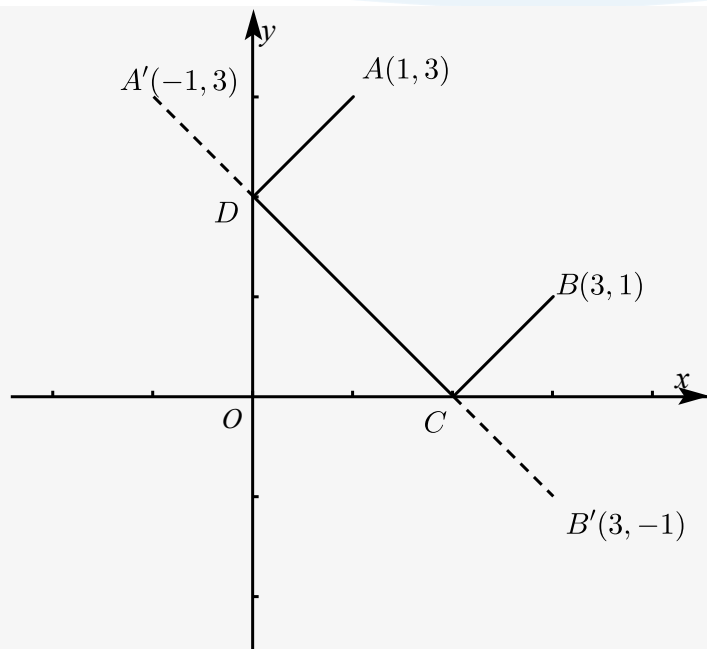
连接 AB' 与直线 $x = 3$ 的交点即为点 C ,

可求直线 AB' 解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 3$,

当 $x = 3$ 时, $y = \frac{3}{4}$,

$\triangle ABC$ 的周长最小值等于 $AB + AB' = 5 + \sqrt{13}$.

(2) 如图,



将点 A ， B 分别关于 y 轴、 x 轴对称到点 A' ， B' ，
 连接 $A'B'$ 与 x 轴、 y 轴的交点即为点 C ， D ，
 直线 CD 解析式为 $y = -x + 2$ ， $C(2, 0)$ ， $D(0, 2)$ ， $AD + CD + BC$ 值最小值
 等于 $A'B' = 4\sqrt{2}$ 。

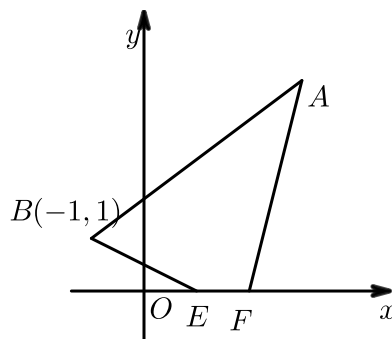
【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

例题7

【教法备注】

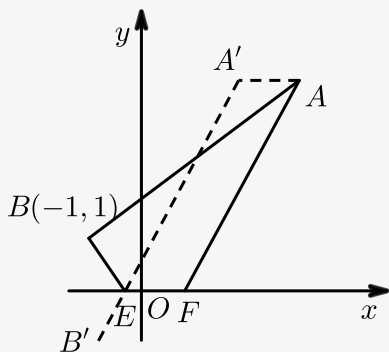
过河问题

15. 如图，平面直角坐标系中，已知点 A 的坐标为 $(3, 4)$ ，点 B 的坐标为 $(-1, 1)$ 时，在 x 轴上另取两点 E ， F ，且 $EF = 1$ 。线段 EF 在 x 轴上平移，线段 EF 平移至何处时，四边形 $ABEF$ 的周长最小？求出此时点 F 的坐标。



【答案】 $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ 。

【解析】如图，过点 A 作 x 轴的平行线，并且在这条平行线上截取线段 AA' ，使 $AA' = 1$ ，作点 B 关于 x 轴的对称点 B' ，连接 $A'B'$ ，交 x 轴于点 E ，在 x 轴上截取线段 $EF = 1$ ，则此时四边形 $ABEF$ 的周长最小。



$$\therefore A(3, 4),$$

$$\therefore A'(2, 4),$$

$$\therefore B(-1, 1),$$

$$\therefore B'(-1, -1),$$

设直线 $A'B'$ 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 2k + b = 4 \\ -k + b = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{5}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\therefore \text{直线} A'B' \text{的解析式为} y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3},$$

$$\text{当} y = 0 \text{时}, \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0, \text{解得} x = -\frac{2}{5}.$$

故线段 EF 平移至如图所示位置时，四边形 $ABEF$ 的周长最小，此时点 E 的坐标为

$$\left(-\frac{2}{5}, 0\right),$$

$$\therefore F \text{点的坐标为} \left(\frac{3}{5}, 0\right).$$

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

练习7

16. 在平面直角坐标系中， AB 两点的坐标分别为 $A(3, 2)$ ， $B(1, 5)$ 。

(1) 若点 P 的坐标为 $(0, m)$ ，当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $\triangle PAB$ 的周长最短。

(2) 若点 CD 的坐标分别为 $(0, a)$ 、 $(0, a + 4)$ ，则当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，四边形 $ABDC$ 的周长最短。

【答案】 (1) $\frac{17}{4}$

$$(2) \frac{5}{4}$$

【解析】(1) 如图1, 过点A作关于y轴的对称点A', 连接A'B,

则A'B与y轴的交点即为点P的位置,

$\because$ 点A的坐标为(3, 2),

$\therefore$ 点A'的坐标为(-3, 2),

设直线A'B的解析式为 $y = kx + b$, 则

$$\begin{cases} -3k + b = 2 \\ k + b = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = \frac{17}{4} \end{cases},$$

即直线A'B的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$,

$\therefore$ 点P的坐标为(0, m), 且点P在直线A'B

上,

$$\therefore m = \frac{17}{4}.$$

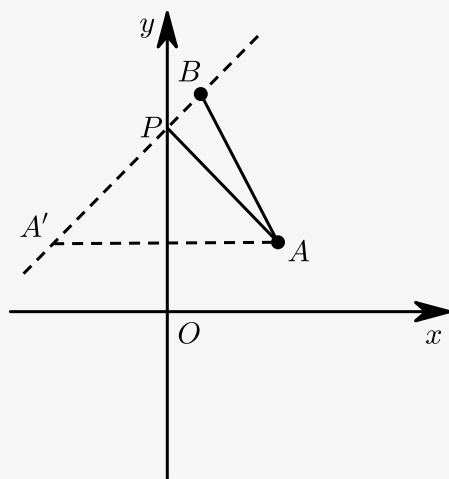


图 1

(2) 如图2, 作点A关于y轴的对称点A',

则A'的坐标为(-3, 2),

把A'向上平移4个单位得到点B'(-3, 6), 连

接BB', 与y轴交于点D,

$\therefore CA' = CA$,

又 $\because$ 点C、D的坐标分别为(0, a)、(0, a + 4)

,

$\therefore CD = 4$,

$\therefore A'B' \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形A'B'DC为平行四边形,

$\therefore CA' = DB'$,

$\therefore CA = DB'$,

$\therefore AC + BD = BB'$, 此时AC + BD最小,

而CD与AB的长一定,

$\therefore$ 此时四边形ABDC的周长最短.

易得直线BB'的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$,

$\therefore$ 点D在直线BB'上, 且D(0, a + 4),

$$\therefore a + 4 = \frac{21}{4},$$

$$\text{解得} a = \frac{5}{4}.$$

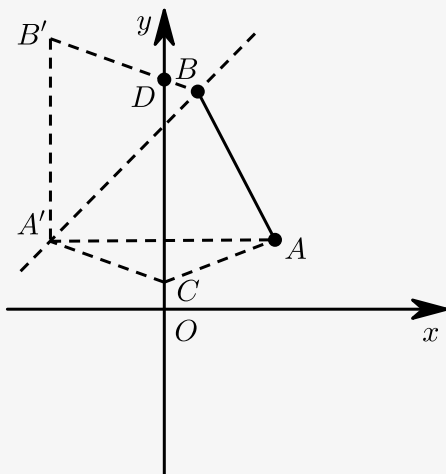
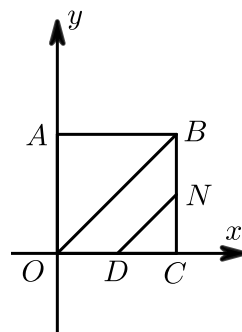


图 2

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

17. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点，顶点 C 、 A 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上，边长为4，点 N 是边 BC 的中点，点 D 是边 OC 的中点。



- (1) 正方形 $OABC$ 的对角线 OB 的长为 _____ ； DN 的长为 _____ 。
- (2) 直线 OB 的解析式为 _____ 。
- (3) 求直线 AD 与直线 OB 的交点坐标。
- (4) 若点 P 、 Q 是直线 OB 上的两个动点，且 P 点的纵坐标大于 Q 点的纵坐标， $PQ = \frac{1}{2}OB$ 。当四边形 $CQPN$ 的周长最小时，求点 Q 的坐标，并求出此时四边形 $CQPN$ 的周长。

【答案】(1) $4\sqrt{2}$ ； $2\sqrt{2}$

(2) $y = x$

(3) $E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 。

(4) $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ ， $2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{5}$ 。

【解析】(1) $\because OCBA$ 是正方形，边长为4，

$$\therefore OC = BC = 4, \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore OB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2},$$

$\because N$ 是 BC 的中点， D 是 OC 的中点，

$\therefore DN$ 是 $\triangle OCB$ 的中位线，

$$\therefore DN = \frac{1}{2}OB = 2\sqrt{2}.$$

(2) $\because OB = OC = 4$,

$$\therefore B(4, 4),$$

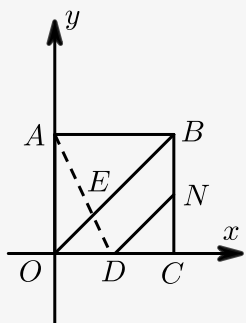
设 OB 直线 $y = kx$,

$$\therefore 4 = 4k,$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\therefore OB: y = x.$$

(3) 连接 AD 与 OB 交于点 E , 如图 ,



$\because D$ 是 OC 的中点且 $C(4,0)$,

$\therefore D(2,0)$

设 AD 直线解析式为 : $y = kx + b$,

把 $A(0,4)$, $D(2,0)$ 代入得 $\begin{cases} 4 = b \\ 0 = 2k + b \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = -2 \\ b = 4 \end{cases}$,

$\therefore AD : y = -2x + 4$,

联立 AD , OB , $\begin{cases} y = x \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$,

$\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

(4) $\because PQ = \frac{1}{2}OB$, $OB = 4\sqrt{2}$,

$\therefore PQ = 2\sqrt{2}$,

$\because C_{\text{四边形}CQPN} = CQ + PQ + PN + CN$

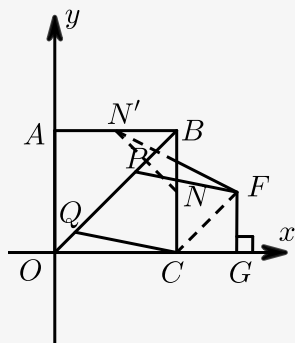
$= CQ + 2\sqrt{2} + PN + 2$

$= 2\sqrt{2} + 2 + CQ + PN$,

$\therefore$ 当 $(CQ + PN)$ 最小时 , $C_{\text{四边形}CQPN}$ 最小 ,

作 N 关于 OB 的对称点 N' , 过 C 作 $CF \parallel OB$, 且 $CF = PQ$,

如图 , 连接 PF ,



$\because CF \parallel OB$, $CF = PQ$,

$\therefore$ 四边形 $PQCF$ 为平行四边形 ,
 $\therefore QC = PF$,
 $\therefore (CQ + PN)_{\text{最小值}} = (PF + PN)_{\text{最小值}}$,
 $\therefore$ 连接 $N'F$, $N'F$ 即为 $PF + PN$ 的最小值 , $N'F$ 与 OB 的交点即为 P ,
 $\therefore CF \parallel OB$,
 $\therefore \angle FCB = \angle BOA = 45^\circ$, 过 F 作 $FG \perp x$ 轴于 G ,
 $\therefore \angle FCG = 45^\circ$, $FC = 2\sqrt{2}$,
 $\therefore FG = CG = 2$, $\therefore F(6, 2)$,
 $\therefore N(4, 2)$ 关于 OB 对称点 N' ,
 $\therefore BN' = BN$, $\angle N'BO = \angle NBO = 45^\circ$,
 $\therefore \angle N'BN = 90^\circ$,
 $\therefore N'$ 在 AB 上 ,
 $\therefore BN' = BN = 2$,
 $\therefore N'(2, 4)$,
 $\therefore N'F = \sqrt{(6-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$,
 $\therefore C_{\text{四边形}CQPN} = 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{5}$,
 设 $N'F$ 直线解析式为 : $y = kx + b$,
 把 $N'(2, 4)$, $N(6, 2)$ 代入得 $\begin{cases} 4 = 2k + b \\ 2 = 6k + b \end{cases}$,
 解得 $\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 5 \end{cases}$,
 $\therefore N'F : y = -\frac{1}{2}x + 5$,
 联立 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ y = x \end{cases}$,
 解得 $\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases}$,
 $\therefore P\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$,
 $\therefore PQ = 2\sqrt{2}$,
 $\therefore Q\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$,
 $\therefore Q\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 时 , 四边形 $CQPN$ 的周长为 $2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{5}$.

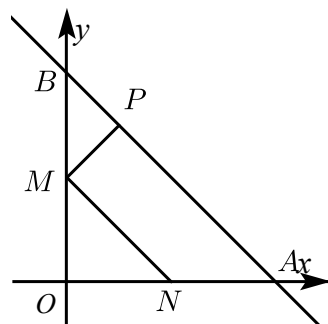
【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

例题8

【教法备注】

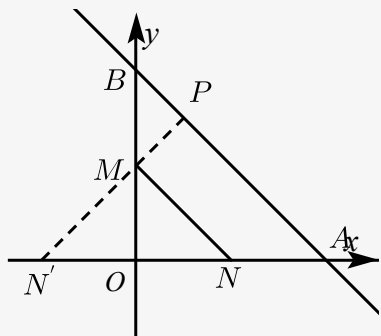
“一定两动”问题

18. 如图所示, 已知点 $N(1, 0)$, 直线 $y = -x + 2$ 与两坐标轴分别交于 A, B 两点, M, P 分别是线段 OB, AB 上的动点, 则 $PM + MN$ 的最小值是 _____ .



【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】如图, 点 N 关于 OB 的对称点 $N'(-1, 0)$, 过点 N' 作 $N'P \perp AB$ 交 OB 于 M ,



则 PN' 为 $PM + MN$ 的最小值,

$$\because A(2, 0), B(0, 2),$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle BAO = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle PAN'$ 是等腰直角三角形,

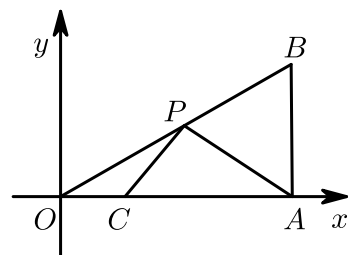
$$\therefore AN' = 3,$$

$$\therefore PN' = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore PM + MN \text{ 的最小值是 } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题

19. 在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle BOA = 30^\circ$, $OA = 3$, 以 O 为原点, OA 所在的直线为 x 轴, 建立如图所示的直角坐标系, 点 C 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 点 P 为斜边 OB 上的一个动点, 当 $PA + PC$ 取最小值时.

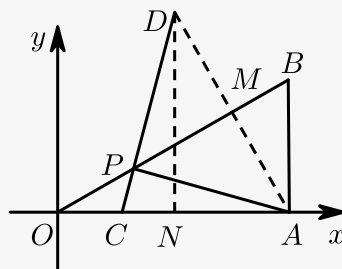


- (1) 在图中确定点 P 的位置, 并保留作图痕迹(不要求尺规作图).
 (2) 求出 $PA + PC$ 的最小值.

【答案】 (1) 画图见解析.

(2) $\frac{\sqrt{31}}{2}$.

【解析】 (1) 作 A 关于 OB 的对称点 D , 交 OB 于点 M ,
 连接 CD 交 OB 于 P , 连接 AP ,
 过 D 作 $DN \perp OA$ 于 N ,
 则此时 $PA + PC$ 的值最小.



(2) $\because DP = PA$,

$\therefore PA + PC = PD + PC = CD$,

$\because OA = 3$, $\angle OAB = 90^\circ$,

$\therefore AB = \sqrt{3}$, $B(3, \sqrt{3})$, $\angle B = 60^\circ$,

由勾股定理得: $OB = 2\sqrt{3}$,

由三角形面积公式得: $\frac{1}{2} \times OA \times AB = \frac{1}{2} \times OB \times AM$,

$\therefore AM = \frac{3}{2}$,

$\therefore AD = 2 \times \frac{3}{2} = 3$,

$\because \angle AMB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAM = 30^\circ$,

$\because \angle BAO = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAM = 60^\circ$,

$\because DN \perp OA$,

$\therefore \angle NDA = 30^\circ$,

$$\therefore AN = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}, \text{ 由勾股定理得: } DN = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\therefore CN = 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 1,$$

$$\text{在Rt}\triangle DNC\text{中, 由勾股定理得: } DC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{31}}{2},$$

$$\text{即 } PA + PC \text{ 的最小值是 } \frac{\sqrt{31}}{2}.$$

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用